

文章编号: 1000-7598 (2011) 03-914-08

基于线性规划模型的极限分析上限有限元的实现

杨 峰, 阳军生, 张学民

(中南大学 土木建筑学院, 长沙 410075)

摘 要: 极限分析上限有限元法常利用三角形常应变率单元和摩尔-库仑屈服函数线性化的方法, 以形成较易求解的线性规划模型。然而为满足计算精度, 需引入大量的优化变量, 增加了计算和存储的难度。为此, 基于线性规划模型, 利用 MATLAB 编制极限分析上限有限元程序, 针对线性规划模型等式约束矩阵的高度稀疏性的特点, 以稀疏矩阵的方式存储, 从而在一定程度上解决了上述问题, 使得上限有限元法能处理较大规模的岩土工程稳定性问题。以条形基础地基承载力课题为例进行算例分析, 验证该方法的有效性, 同时讨论了模型网格单元和塑性乘子数目对计算结果精度的影响。

关 键 词: 极限分析; 上限有限元; 破坏模式; 线性规划; 条形基础; 承载力

中图分类号: TU43

文献标识码: A

Implementation of finite element upper bound solution of limit analysis based on linear programming model

YANG Feng, YANG Jun-sheng, ZHANG Xue-min

(School of Civil and Architectural of Engineering, Central South University, Changsha 410075 China)

Abstract: Triangular elements with constant strain rate and linearization of Mohr-Coulomb criterion are regularly used for finite element upper bound solution to form a linear programming model. However, a calculating and storage difficulty has been brought out by numerous variables, which are required to be introduced in the linear program, to seek for precision requirement. Calculating program using Matlab for finite element upper bound solution is compiled based on linear programming model. And it takes full advantage of the highly sparseness of equality constraint matrix. By saving the matrix as sparse matrix, the calculating and storage problem can be solved. Finally, stability problems of large-scale geotechnical engineering can also be solved. A calculating example of the bearing capacity of strip footing is given to show the validity of the compiled program and the effect of precise results on the number of elements; and plastic multiplier rate has been discussed.

Key words: limit analysis; finite element upper bound solution; failure mechanism; linear programming; strip footing; bearing capacity

1 引 言

目前, 利用极限分析上限法进行岩土工程稳定性分析成为研究热点之一。利用该法可进行边坡稳定性、地基承载力、隧道土压力等诸多课题的研究^[1-7]。上限法的实现主要通过两种途径, 一是需预先假定破坏模式, 然后通过数学优化得到上限解; 二是无需假定破坏模式, 采用有限单元离散的方式, 通过数学优化的方式自动搜索最优的破坏模式, 从而得到上限解。

假定破坏模式的方式是利用上限法求解问题

的传统途径。该法直观明了、概念清晰, 对特定问题的研究非常有效。然而, 当模型的边界条件、力学参数等因素复杂时, 精确的破坏模式难以构建, 限制了该方法的应用。

与此同时, 采用与有限单元相结合的上限法近年来发展迅速。该方法无需假定破坏模式, 可考虑复杂的边界条件、不同的力学参数, 使得其应用前景较为广阔。

Sloan 等^[8-9]对该方法做了很多具有开创性的工作。其早期的工作主要是将上限有限元转化为大规模的线性规划问题。为弥补三角形常应变率单元

收稿日期: 2009-10-12

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划项目 (No. NCET-08-0569)。

第一作者简介: 杨峰, 男, 1981 年生, 博士研究生, 主要从事隧道与地下工程方面的研究工作。E-mail: yf5754@126.com

内部速度为低阶变化的缺陷, 在所有单元之间均引入速度间断线。国内王均星等^[10-11]在 Sloan 提出的方法的基础上, 考虑了孔隙水压力、节理等因素, 做了相关的应用研究工作。而殷建华等^[12-13]提出了刚体有限元上限法, 其假定单元为刚性体, 内部耗散能只发生在速度间断线上, 并采用非线性规划进行求解。

采用非线性规划模型可减少所需优化变量的数目, 但求解过程相当耗时。而线性规划问题求解相对容易, 但实际应用中, 为了提高计算精度, 其模型包含的优化变量数目相当庞大, 将导致计算和存储两方面的困难。

为此, 本文在 Sloan 等^[8-9]工作的基础上, 基于线性规划模型, 利用 MATLAB 编制极限分析上限有限元程序, 以稀疏矩阵的形式存储线性规划模型中的等式约束的系数矩阵, 从而在一定程度上减小了计算和存储方面的困难, 使得极限分析上限有限元法能在较大规模的问题中得到应用。通过分析经典的条形地基承载力课题, 并与现有精确解进行对比, 验证了该方法的可行性和有效性。

2 极限分析上限法原理

极限分析上限定理表述为: 在所有的运动许可的塑性应变率场 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 和速度场 v_i^* 对应荷载中极限荷载 F 最小^[1], 即

$$\int_S F_i v_i^* dS + \int_A \gamma_i v_i^* dA \leq \int_A \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dA + \int_{S_D} (\tau - \sigma_n \tan \varphi) \Delta v_i^* ds \quad (1)$$

式(1)左边为极限荷载 F_i 和自重或体力 γ_i 所作的塑性功率; 右边为变形体 A 内部和速度间断线 S_D 上塑性应变产生的耗散功率。

采用传统的途径求解时, 一般需假定由刚性滑块体系组成的破坏模式。为计算简便, 滑块内部不产生塑性应变, 耗散功率只产生于速度间断线上, 且速度间断线上相对速度方向也预先确定。而采用上限有限元法, 单元内部也可发生塑性应变, 且速度间断线上的相对速度方向未知。

3 上限有限元的形成

3.1 三角形常应变率单元

在上限有限元采用的单元中, 三角形常应变率单元应用最广。如图1所示, 三角形单元每个节点有2个速度分量, 每个三角形单元包含 p 个塑性乘子 $\dot{\lambda}_i$ 。单元内部任一点的速度可表示为3个节点速

度的线性函数:

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, v = \sum_{i=1}^3 N_i v_i \quad (2)$$

式中: u_i 和 v_i 为节点在 x 和 y 方向的速度分量; N_i 为单元形函数, N_i 的表达式参见文献[8-9]。由于单元间设置速度间断线, 与有限元网格不同, 节点只属于特定单元, 相同坐标处的不同节点速度可不相同。

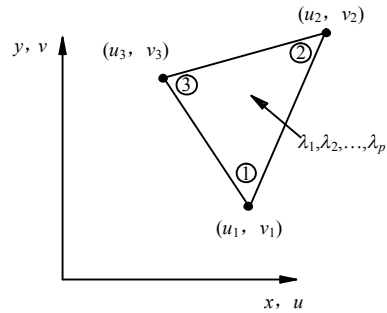


图1 三角形常应变率单元

Fig.1 Constant strain triangular element

3.2 单元内部速度约束条件

上限法要求破坏区域内的速度场满足相关流动法则和速度相容条件, 对于平面应变条件下的理想弹塑性或刚塑性体, 相关流动法则表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: 塑性乘子 $\dot{\lambda} \geq 0$, 并以拉应变为正。为了形成节点速度与塑性乘子之间的线性关系, 并去除相应应力分量, 需要将屈服函数线性化, 且线性化的屈服函数需外接于原屈服函数, 以满足上限解要求。对平面应变问题, 摩尔-库伦屈服准则可表示为

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 = 0 \quad (4)$$

式中: c 和 φ 分别为土体黏结力和内摩擦角, 以拉应力为正。如文献[8-9], 上式所表示的屈服函数在以 $X = \sigma_x - \sigma_y$ 和 $Y = 2\tau_{xy}$ 所建立的坐标系中为一个圆, 可方便地利用外接多边形进行代替。当多边形边数为 p 时, 经线性化的屈服函数可表示为

$$F_k = A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} - 2c \cos \varphi = 0 \quad (5)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \cos \alpha_k + \sin \varphi \\ B_k &= \sin \varphi - \cos \alpha_k \\ C_k &= 2 \sin \alpha_k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

而 $\alpha_k = 2\pi k/p$; $k=1, 2, \dots, p$ 。于是, 式 (3) 表示的塑性应变率变为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_x} = \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k A_k \\ \dot{\varepsilon}_y &= \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_y} = \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k B_k \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k \frac{\partial F_k}{\partial \tau_{xy}} = \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k C_k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

对于每个三角形单元, 由相关联流动法则和速度相容条件, 需要施加 3 个等式约束, 单元内部的约束条件可表示为

$$a_{11}x_1 - a_{12}x_2 = 0 \quad (8)$$

其中:

$$a_{11} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$x_1^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3] \quad (10)$$

$$a_{12} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_k & \dots & A_p \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_k & \dots & B_p \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_k & \dots & C_p \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$x_2^T = [\dot{\lambda}_1 \quad \dot{\lambda}_2 \quad \dots \quad \dot{\lambda}_k \quad \dots \quad \dot{\lambda}_p] \geq 0 \quad (12)$$

式中: A 为单元面积; $y_{ij} = y_i - y_j$; $x_{ij} = x_i - x_j$ 。

3.3 速度间断线上的速度约束条件

三角形常应变率单元属于低阶单元, 仅利用低阶单元离散破坏区域, 常难以达到理想的精度。为弥补此缺陷, 需要在单元之间引入速度间断线, 允许速度发生跳跃。此时, 应保证速度间断线上的相对速度满足相关联流动法则和相容约束条件。

如图 2 所示, 节点 1、2 和 3、4 所在的速度间断线与 x 轴夹角为 θ , 对于摩尔-库仑屈服准则, 速度间断线上的法向和切线相对速度 Δv 和 Δu 需满足:

$$\Delta v = |\Delta u| \tan \varphi \quad (13)$$

由于绝对值的存在难以形成标准的线性规划模型。为此, Sloan 在速度间断线相邻节点引入新

的优化变量 u_{ij}^+ 和 u_{ij}^- 。令 $\Delta u_{ij} = u_{ij}^+ - u_{ij}^-$, $\Delta v_{ij} = (u_{ij}^+ + u_{ij}^-) \tan \varphi$, 且 $u_{ij}^+ \geq 0$, $u_{ij}^- \geq 0$ 。

尽管采用 $(u_{ij}^+ + u_{ij}^-)$ 代替 $|u_{ij}^+ - u_{ij}^-|$, 只有在 u_{ij}^+ 或 u_{ij}^- 之一等于 0 时, 相关联流动法则确定的塑性流动约束条件才完全满足。然而当这个条件不满足时, 相当于提高了速度间断线上的 c 和 φ 值, 由此仍可满足上限解的要求。

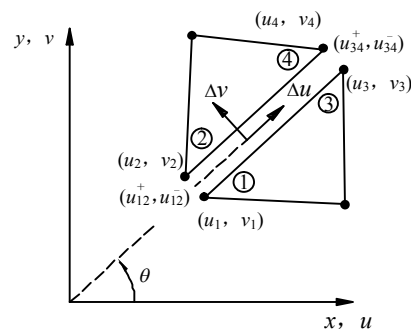


图 2 速度间断线及优化变量

Fig.2 Velocity discontinuity and optimized variables

将速度间断线节点相对速度分量 Δv 和 Δu 由绝对速度分量表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_{ij} &= u_{ij}^+ - u_{ij}^- = (u_j - u_i) \cos \theta + (v_j - v_i) \sin \theta \\ \Delta v_{ij} &= (u_{ij}^+ + u_{ij}^-) \tan \varphi = (u_i - u_j) \sin \theta + (v_j - v_i) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

于是, 对于每条速度间断线, 需要施加塑性流动约束条件如下:

$$a_{21}x_1 - a_{23}x_3 = 0 \quad (15)$$

其中:

$$a_{21} = \begin{bmatrix} -\cos \theta - \sin \theta \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \sin \theta - \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta - \sin \theta \cos \theta \sin \theta \\ 0 & \sin \theta - \cos \theta - \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$x_1^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] \quad (17)$$

$$a_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \tan \varphi & \tan \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \tan \varphi & \tan \varphi \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$x_3^T = [u_{12}^+ \quad u_{12}^- \quad u_{34}^+ \quad u_{34}^-] \geq 0 \quad (19)$$

3.4 速度边界条件

速度场应满足已知的速度边界条件。设节点 i 位于与 x 轴夹角为 θ 的速度边界上, 已知该边界上的切向和法向速度分别为 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$, 则节点 i 的速度分量 u_i 和 v_i 需满足:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

写成矩阵形式如下:

$$a_{31}x_1 = b_3 \quad (21)$$

其中:

$$a_{31} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad b_3 = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

上述速度边界条件可用于刚性结构施加于土体的速度边界条件, 如刚性基础或刚性挡土墙等结构。对于柔性结构作用于土体表面的速度边界条件, 可以对土体表面施加如下约束:

$$\int_S \bar{v} \, dS = Q \quad (23)$$

式中: $\bar{v}$ 为土体边界 S 上的法向速度; Q 可认为是正交穿越土体边界 S 的塑流大小; 由于计算中无需速度值的大小, 而只需各速度之间的相对关系, 因此, 可以令 $Q=1$ 。

3.5 单元内部耗散功率

每个单元内部耗散功率 P_c 为

$$P_c = \int_A (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA \quad (24)$$

将式 (7) 代入式 (24) 可得

$$P_c = 2A \cos\varphi \sum_{k=1}^p \dot{\lambda}_k \int_A c \, dA \quad (25)$$

如果假定土体的黏聚力 c 在单元内部也按照线性分布, c_1 、 c_2 、 c_3 分别为单元 3 个节点上的黏聚力, 则上式写成矩阵形式为

$$P_c = c_2^T x_2 \quad (26)$$

其中:

$$c_2^T = \frac{2}{3} A (c_1 + c_2 + c_3) \cos\varphi [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad (27)$$

$$x_2^T = [\dot{\lambda}_1 \quad \dot{\lambda}_2 \quad \dots \quad \dot{\lambda}_p] \quad (28)$$

3.6 速度间断线上的耗散功率

每条速度间断线上的耗散功率 P_d 为

$$P_d = \int_l c |\Delta u| dl \quad (29)$$

式中: $|\Delta u| = |u^+ - u^-|$, 为了形成线性规划模型, 令 $|\Delta u| = u^+ + u^-$, 由此得到的结果仍可满足上限解的要求, 有:

$$P_d = \int_l c (u^+ + u^-) dl \quad (30)$$

由于速度间断线 l 上任一点的 u^+ , u^- 沿着速度间断线为线性分布, 式 (30) 可表示为

$$P_d = c_3^T x_3 \quad (31)$$

其中:

$$c_3^T = l \left[\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \quad \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 \quad \frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{3}c_2 \quad \frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{3}c_2 \right] \quad (32)$$

$$x_3^T = [u_{12}^+ \quad u_{12}^- \quad u_{34}^+ \quad u_{34}^-] \quad (33)$$

3.7 外力功率

体力如自重在每个单元上产生的外力功率 P_t 为

$$P_t = - \int_A \gamma v \, dA \quad (34)$$

对于三角形常应变率单元, 速度在单元内部线性分布, 有:

$$\int_A v \, dA = \frac{A}{3} (v_1 + v_2 + v_3) \quad (35)$$

写成矩阵形式:

$$P_t = c_1^T x_1 \quad (36)$$

其中:

$$c_1^T = -\frac{\gamma}{3} [0 \quad A \quad 0 \quad A \quad 0 \quad A] \quad (37)$$

$$x_1^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3] \quad (38)$$

对于面力所作的功率, 可按照柔性结构作用于土体表面施加相应的速度边界条件或直接进行计算; 当作用的面力的分布形式较复杂时, 可将面力沿边界积分求解相应的外力功率, 这里不再详述。

4 上限有限元的线性规划模型

上节已阐述了上限有限元的离散、约束条件的形成以及耗散功率与外力功率的求解等问题。接下来根据功率平衡方程 (1) 可得到目标函数, 即耗散功率减去外力功率的差值。其优化变量为节点速度分量 u_i 和 v_i 、速度间断线引入的辅助变量 Δu_{ij} 和 Δv_{ij} 以及单元塑性乘子 $\dot{\lambda}_i$ 。考虑破坏区域的所有单元和节点以及边界条件, 按照上限法原理可形成如

下线性规划模型。

最小值为

$$\mathbf{C}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_3^T \mathbf{X}_3 - \mathbf{C}_1^T \mathbf{X}_1 \quad (39)$$

式中：大写字母表示各量为全局变量，即考虑所有单元、节点以及边界条件。其中 $\mathbf{X}_1$ 为所有节点速度向量； $\mathbf{X}_2$ 为所有单元塑性乘子向量；而 $\mathbf{X}_3$ 为所有速度间断线辅助变量向量。其余系数矩阵的意义对应于相应的单元内部或速度间断线上施加塑性流动约束或破坏区域施加速度边界约束时形成的全局系数矩阵。至此，上限有限元解决岩土工程稳定性问题转化成为线性规划问题。

约束条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{11} \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{X}_2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{X}_3 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A}_{41} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{X}_2 &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_3 &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

实际计算中为保证精度，需采用大量三角形单元，并增加每个单元的塑性乘子 λ_i 的个数 p ，于是优化变量增加，等式约束的系数矩阵相当庞大，难以进行较大规模的计算。

由于单元内部约束条件和相邻单元并无关系，同样速度间断线约束条件和相邻速度间断线并无关系，这就决定了等式约束的系数矩阵具有高度稀疏性，而且随单元数目的增加，其稀疏性相应增加。为此，在编程中采用稀疏矩阵存储的方式存储等式约束的系数矩阵，即仅存储非 0 元素的数值及在矩阵中的行号和列号，不存储其余的 0 元素，采用该法能大大降低计算过程中的内存占用量。

采用 MATLAB 编制上限有限元程序，以稀疏矩阵存储的方式在程序中形成相应系数矩阵时予以考虑。通过调用优化工具箱 linprog 函数求解线性规划问题。该函数采用大型算法时，能很好地支持稀疏矩阵，并且无需设置优化变量的初始值。由此可解决较大规模线性规划问题，其中优化变量个数可达几十万，满足一般问题的精度要求。以下以条形基础地基承载力课题为例，进行说明。

5 算例验证

条形基础地基承载力问题是岩土工程中的经典课题。这里采用上限有限元求解条形基础地基承载力系数 N_γ 和 N_c 。取土体内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ ，考虑基础与地基之间为完全粗糙边界。计算模型如图 3 所示，由于模型沿着基础中线对称，故只取右侧的

一半计算。其中 B 为基础宽度，沿 x 方向上的取 $0.5B + 4.5B$ ，沿 y 方向取为 $4B$ 。边界约束条件为：右侧、下侧边界 x 和 y 方向速度均为 0，左侧边界 x 方向速度为 0，基础与地基边界 y 方向速度 $v = -1$ ， x 方向速度为 0。

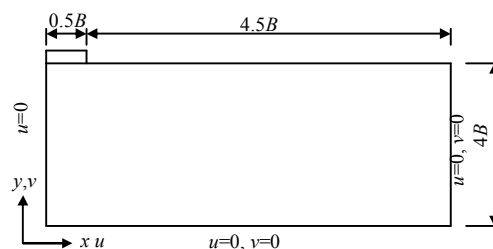


图 3 计算模型

Fig.3 Calculation model

采用 3 种不同的网格对计算模型进行划分，如图 4~6 所示。

图 4 和 5 示意的模型网格 1 和 3 均为规则网格单元，其区别在于网格密度不同。考虑到刚性基础边缘为奇异点，该点附近区域速度场变化剧烈，于是，图 6 示意的模型网格在基础边缘进行加密，方法为网格大小沿着 x 和 y 方向设置一定的梯度，形成渐变的网格。表 1 为 3 种模型网格的参数。

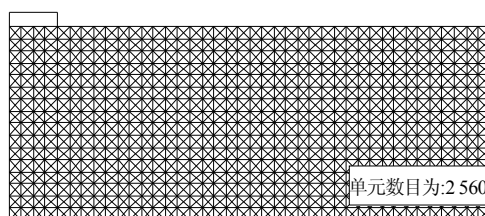


图 4 计算模型网格 1

Fig.4 Mesh 1 for calculation model

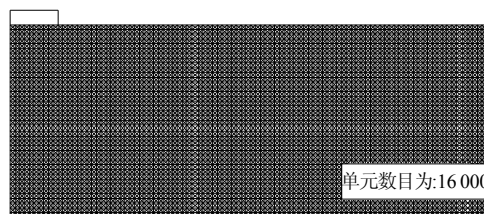


图 5 计算模型网格 2

Fig.5 Mesh 2 for calculation model

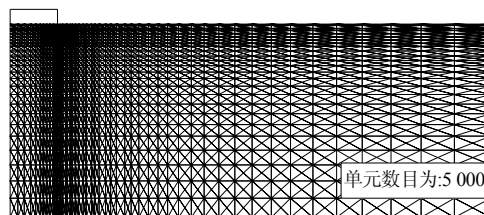


图 6 计算模型网格 3

Fig.6 Mesh 3 for calculation model

从表 1 可以看出, 3 种不同密度的网格的参数相差很大。当 $p=36$ 时, 网格 1 和网格 3 的优化变量数目(节点速度和塑性乘子之和)分别为 122 880 和 240 000, 而网格 2 更达到 768 000 (此处的优化变量包括了模型边界上已知的节点速度, 数目较少, 在计算前可去除)。在这些优化变量中, 塑性乘子占相当大的比例。可见, 将屈服函数线性化引入了大量优化变量。计算过程等式约束的系数矩阵相当庞大。如上所述, 通过引入稀疏矩阵存储的方式, 能大大降低计算过程中的内存需求。同时, 由于采用线性规划模型, 其求解速度较快, 该计算模型可在目前主流 PC (配备 2G 内存) 上进行。

表 1 计算模型网格参数

Table 1 Mesh parameters for calculation model

网格编号	单元数目	节点速度数目	塑性乘子数目
1	2 560	$2\,560 \times 12$	$2\,560p$
2	16 000	$16\,000 \times 12$	$16\,000p$
3	5 000	$5\,000 \times 12$	$5\,000p$

注: p 为每个单元塑性乘子个数。

表 2、3 和图 7、8 为 $\varphi=30^\circ$, 并考虑基础与地基之间为完全粗糙边界时, 条形基础地基承载力系数 N_γ 和 N_c 的计算结果以及精确解。其中 N_γ 的精确解由 Martin^[14]采用数值方法得出, 而 N_c 可利用已有理论公式得到。对于 3 种网格, 计算中分别考虑单元塑性乘子数目 p 取 6、12、24、36 共 4 种情况。

表 2 N_γ 计算结果($\varphi=30^\circ$)Table 2 Results of N_γ for $\varphi=30^\circ$

p	网格 1		网格 2		网格 3	
	N_γ	误差 /%	N_γ	误差 /%	N_γ	误差 /%
6	23.20	57.2	20.77	40.8	21.41	45.1
12	19.83	34.4	17.96	21.7	17.79	20.6
24	18.87	27.9	17.02	15.4	16.84	14.1
36	18.66	26.5	16.81	14.0	16.64	12.8

注: N_γ 的精确解为 14.754。

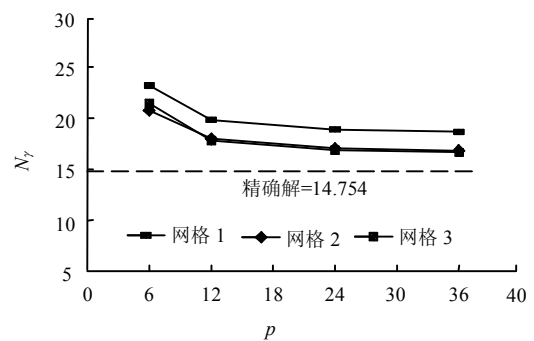
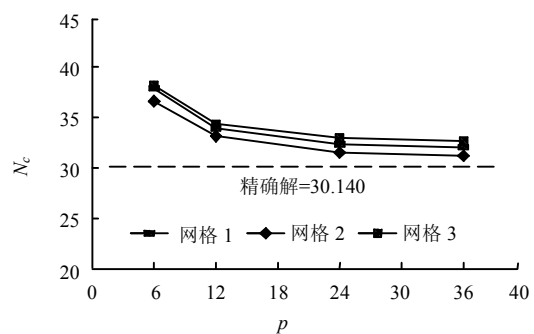
表 3 N_c 计算结果($\varphi=30^\circ$)Table 3 Results of N_c for $\varphi=30^\circ$

p	网格 1		网格 2		网格 3	
	N_c	误差 /%	N_c	误差 /%	N_c	误差 /%
6	37.84	25.5	36.60	21.4	38.15	26.6
12	33.90	12.5	33.12	9.9	34.32	13.9
24	32.33	7.3	31.50	4.5	32.97	9.4
36	32.03	6.3	31.20	3.5	32.64	8.3

注: N_c 的精确解为 30.140。

从表 2、3 可以看出, 对于网格 1 和 2, 计算结果的精度随着网格数目和塑性乘子数目 p 的增加而增加。对于网格 3, 其网格数目小于网格 2, 然而其基础边缘网格加密, 得到的 N_γ 的计算结果仍较优, 而 N_c 计算结果误差相比网格 2 稍大。说明计算 N_γ 时, 基础边缘网格加密对于减小误差效果明显; 而对于 N_c , 通过较均匀的加密网格得到的计算结果误差较小。

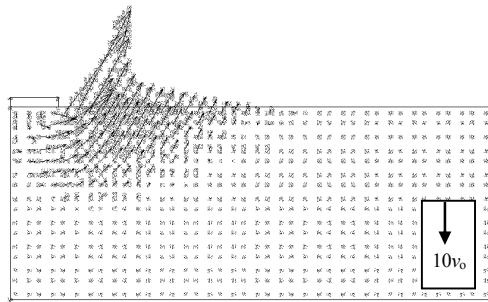
从表 2、3 和图 7、8 还可看出, 塑性乘子数目 p 对计算结果影响较大。对于 N_γ , 采用网格 2, p 分别取 6 和 36 时, 计算结果误差为 40.8% 和 14.0%; 对于 N_c , 采用网格 2, p 分别取 6 和 36 时, 计算结果误差为 21.4% 和 3.5%。可见, 塑性乘子数目增加, 计算结果的误差明显减小。还可发现, 塑性乘子数目 p 分别取 24 和 36 时, 由此引起的计算结果的误差变得不甚明显。说明在实际计算过程中, p 取 24 已能得到较好的结果。

图 7 N_γ 计算结果对比Fig.7 Comparison of results of N_γ 图 8 N_c 计算结果对比Fig.8 Comparison of results of N_c

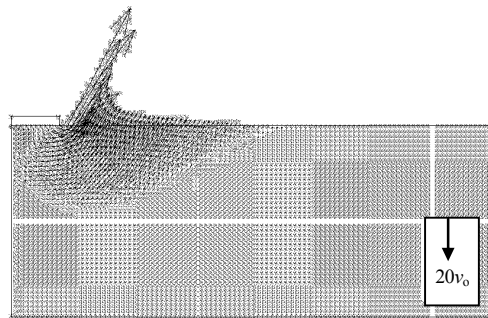
为了详细说明经过优化得到地基的破坏模式, 将速度场计算结果示于图 9、10。该速度场的绘制通过 MATLAB 计算结果的数据经处理后导入 CAD 进行绘图得到。

图 9 为 $p=24$ 时, 利用 3 种网格计算 N_γ 得到的速度场, 其中箭头代表由 4 个三角形单元组成的四

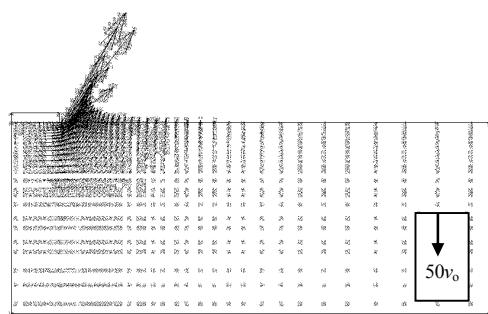
边形中心点处的平均速度的大小和方向。对于破坏区域外的单元,由于速度为 0,在图中表示为一个点。模型右下角的箭头代表地基速度 v_0 的大小。可以看出,速度场在基础附近小范围内变化非常剧烈,且随着基础边缘网格密度的增加,这种趋势更加明显。说明当破坏模式的速度场变化剧烈时,需要在速度变化剧烈的区域加密网格单元,才能反映破坏模式实际形态,并有效地提高计算结果的精度。



(a) 网格 1 ($p=24$)



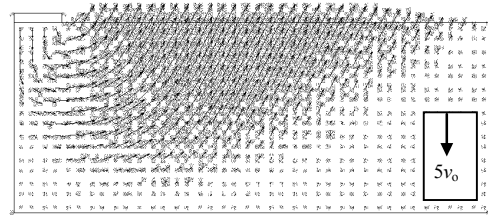
(b) 网格 2 ($p=24$)



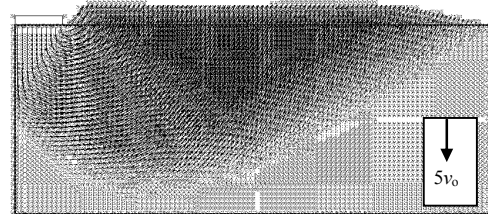
(c) 网格 3 ($p=24$)

图 9 计算 N_c 时得到的速度场结果
Fig.9 Velocity field for calculating N_c

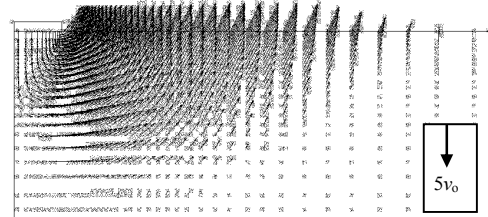
图 10 为 $p=24$ 时,利用 3 种网格计算 N_c 得到的速度场。可以看出,速度场的变化程度相比图 9 而言较为缓和,尤其是基础边缘的速度场未发生剧烈变化,并且破坏区域及速度场波及的范围较大。这可能是 N_c 的计算精度对网格数目不太敏感的原因之一。



(a) 网格 1 ($p=24$)



(b) 网格 2 ($p=24$)



(c) 网格 3 ($p=24$)

图 10 计算 N_c 时得到的速度场结果
Fig.10 Velocity field for calculating N_c

6 结 语

本文在 Sloan 等工作的基础上,基于线性规划模型,采用 MATLAB 编制上限有限元程序,利用模型中的等式约束的系数矩阵的高度稀疏性,以稀疏矩阵的方式存储,在一定程度上解决了计算和存储方面的困难,可进行较大规模的上限有限元计算。通过条形地基承载力的算例分析,说明了该方法的有效性,同时对模型网格单元和塑性乘子数目对计算结果精度的影响进行了讨论。

参 考 文 献

- [1] CHEN W F, Limit analysis and soil mechanics[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [2] DONALD I, CHEN Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1997, 34(6): 853—862.
- [3] WANG Y J, YIN J H, CHEN Z Y. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method [J]. *International Journal for*

Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25: 841—851.

- [4] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1—11.
CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics [J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(1): 1—11.
- [5] LECA E, DORMIEUX L. Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in frictional material [J]. **Géotechnique**, 1990, 40(4): 581—606.
- [6] AUGARDE C E, LYAMIN A V, SLOAN S W. Stability of an undrained plane strain heading revisited [J]. **Computers and Geotechnics**, 2003, 30: 419—430.
- [7] ATKINSON J H, POTTS D M. Stability of shallow tunnel in cohesionless soil [J]. **Géotechnique**, 1977, 27(2): 203—215.
- [8] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite element and linear programming [J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1989, 13: 263—282.
- [9] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1995, 127: 293—314.
- [10] 王均星, 王汉辉, 吴稚峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1867—1873.

上接第 913 页

- [13] 吴良平. 粗粒土组构试验研究[硕士学位论文 D]. 武汉: 长江科学院, 2007.
- [14] WU Ai-xiang, SUN Ye-zhi, LIU Xiang-ping. Granular dynamic theory and its application[M]. Beijing: Metallurgy Industry Press, 2002.
- [15] 李林, 马庆利. 兰尖铁矿尖山排土场岩土块度组成分析及分布规律的研究[J]. 四川冶金, 1990, (3): 1—8.
LI Lin, MA Qing-li. Study on the composition of rock fragmentation and distribution law of Lanjian Iron Jianshan[J]. **Dump Sichuan Metallurgy**, 1990, (3): 1—8.
- [16] 周成虎, 孙战利, 谢一春. 地理元胞自动机研究[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [17] MA Zhi-tao, TAN Yun-liang, ZHANG Ting. Modeling of rock failure based on physical cellular automata[J]. **Journal of Southeast University (English Edition)**, 2005, 21(3): 348—352.
- [18] 周辉, 冯夏庭, 谭云亮. 物理细胞自动机与岩石弹-脆-塑性性质的细观机制研究[J]. 岩土力学, 2002, 23(6): 678—682.
ZHOU Hui, FENG Xia-ting, TAN Yun-liang, et al. Research on physical cellular automata and microscopical

mechanism of elasticity-brittleness-plasticity of rock[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(6): 678—682.

- WANG Jun-xing, WANG Han-hui, WU Ya-feng. Stability analysis of soil slope by finite element method with plastic limit upper bound [J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(11): 1867—1873.
- [11] 李泽, 王均星, 王汉辉. 成组节理岩体的有限元塑性极限分析研究 [J]. 岩土工程学报, 2007, 29(10): 1517—1521.
LI Ze, WANG Jun-xing, WANG Han-hui. Plastic limit analysis on stability of jointed rock slopes using finite elements[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(10): 1517—1521.
- [12] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性的刚体有限元上限分析 [J]. 岩土工程学报, 2003, 25(3): 273—277.
YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE C F. A rigid finite element method for upper bound limit analysis of soil slopes subjected to pore water pressure [J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(3): 273—277.
- [13] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 岩土边坡稳定性的刚体有限元上限分析法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(6): 898—905.
YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE C F. Upper bound limit analysis of stability of rock and soil slopes using rigid finite elements [J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(6): 898—905.
- [14] MARTIN C M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics [C]//Proceedings of the 11th International Conference of IACMAG. Turin: [s.n.], 2005: 441—450.
- mechanism of elasticity-brittleness-plasticity of rock[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(6): 678—682.
- [19] 王光进, 杨春和, 张超, 等. 粗粒含量对散体岩土颗粒破碎及强度特性试验研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(12): 3649—3655.
WANG Guang-jin, YANG Chun-he, ZHANG Chao, et al. Experimental research on particle breakage and strength characteristics of rock and soil materials with different coarse-grained contents[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(12): 3649—3655.
- [20] 中国科学院武汉岩土力学研究所. 德兴铜矿西源岭排土场稳定性及破坏模式研究报告[R]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2008.
- [21] 王光进, 杨春和, 张超, 等. 粗粒土三轴试验数值模拟与试样颗粒初始架构初探[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 585—592.
WANG Guang-jin, YANG Chun-he, ZHANG Chao, et al. Numerical simulation triaxial tests for coarse-grained soil and preliminary study on the initial fabric of samples grain[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(2): 585—592.